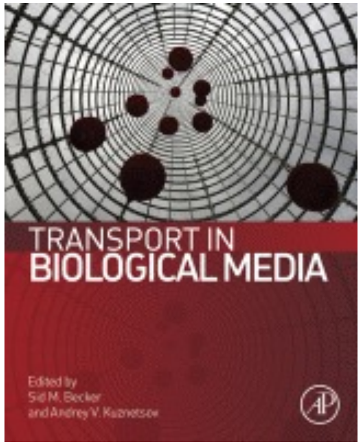
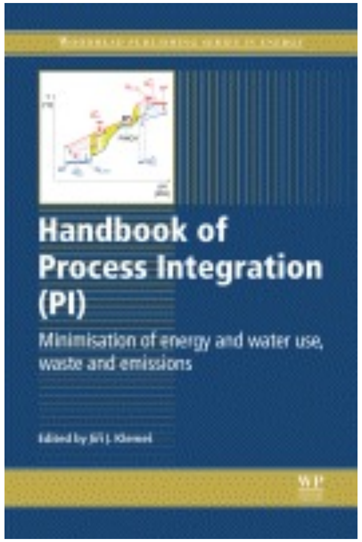
ME 3-1 : Corrélation induite – utilité?

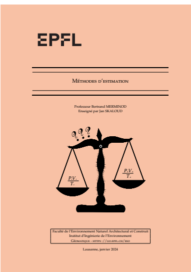
- Motivation
  - <u>Les mesures directes sont souvent transformées </u>(p.ex. aux *différences*)
  - Concentration (de deux flux échangeant de la masse, p.ex. contaminants dans un flux H_2O, la force motrice = Δc)
  - Température (le transfert de chaleur, la force motrice = ΔT).
  - Densité (ventilation: des différences de densité entraînent des changements localisés de l'indice de réfraction du gaz, la force motrice = Δd) .

- Incidence
  - → émergence de la corrélation
  - → cela pose-t-il un problème ?   R: tous les (bons) chemins mènent à Rome …

- Relation avec polycopié ME
  - Direct: propagation de variance
  - Indirect: compensation des observations, determination de parameteters (ou les problèmes combinés)

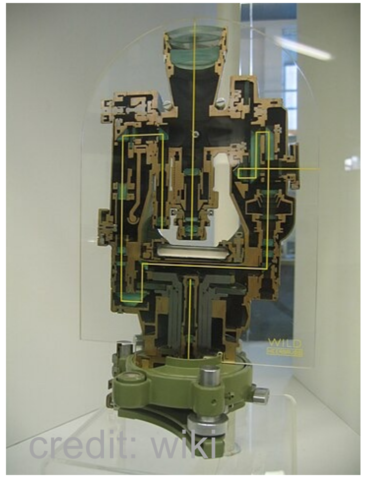






ME 3-2 : Corrélation induite

Exemple géométrique, car on peut le voir …

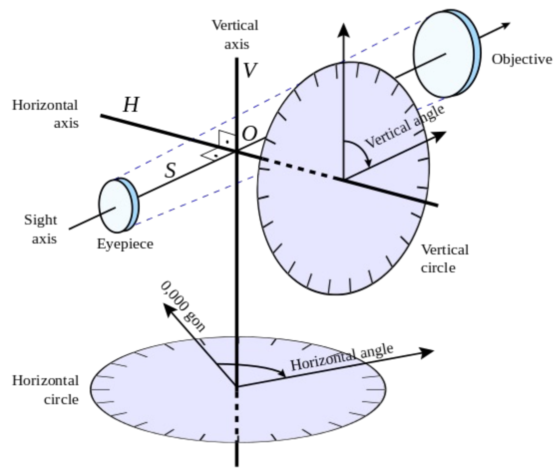


- Angles *avec référence fixe* $$y = \mathbf{f}_1(\ell_a)$$
  - Variance d'un angle
  - Corrélation positive → interprétation

- Angles *séquentiels* $$y = \mathbf{f}_2(\ell_b)$$
  - Variance d'un angle
  - Corrélation négative → interprétation
  -

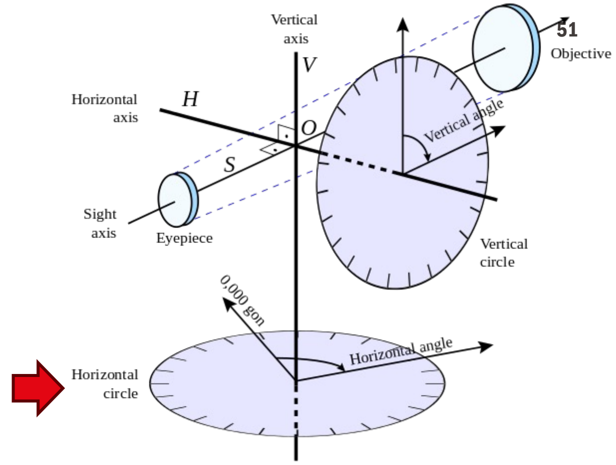
- *Somme* d'angles
  - variance inchangée

$$\mathbf{K}_{yy} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{K}_{\ell\ell} \cdot \mathbf{F}^T$$

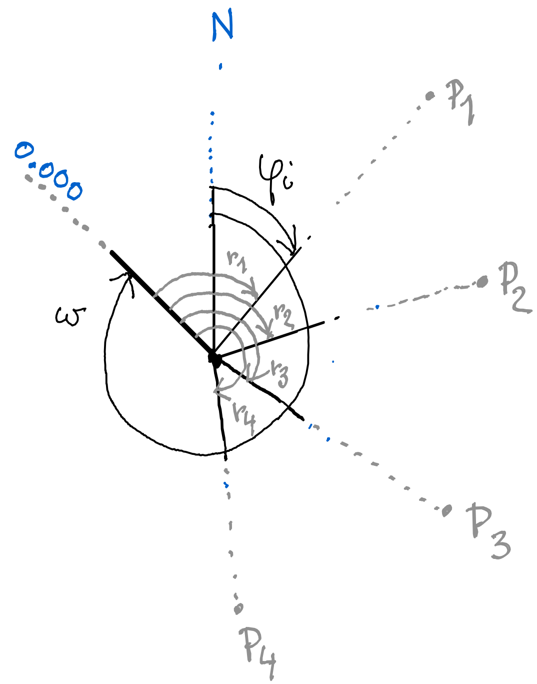


EPFL

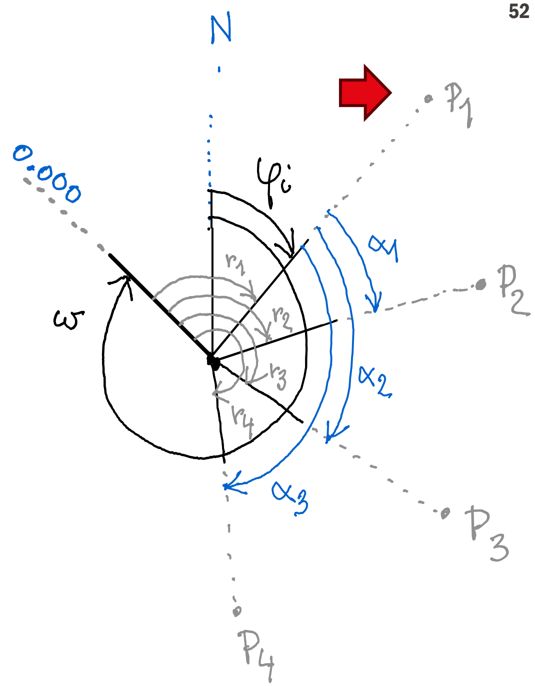
Corrélation induite
Exemple, car on peut le voir … (1)



- Nous considérons les observations d'angles horizontaux (théodolite, laser scanneur, rapporteur)
- Pour chaque cible (point) P_i, on obtient une direction (Richtung) r_i par rapport au 0.000 (orienté arbitrairement)
- ω = orientation (gisement du zéro)
- Gisement (φ) = orientation (ω) + direction (r)



Corrélation induite
Exemple, car on peut le voir … (2)



- Nous aimerions connaître les angles par rapport au premier point.

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_\alpha} \begin{bmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ r_4\end{bmatrix}$$

$$y = \mathbf{f}_1(\ell_a)$$

$$\alpha = f(r):$$

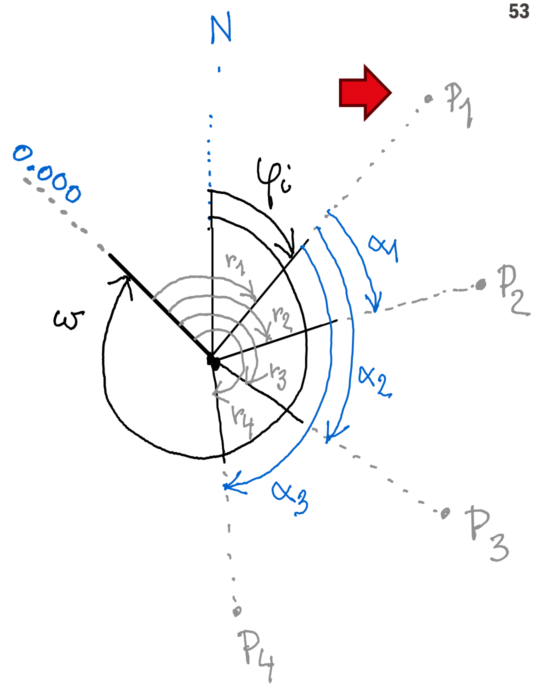
$$\alpha_1 = r_2 - r_1$$
$$\alpha_2 = r_3 - r_1$$
$$\alpha_3 = r_4 - r_1$$

- Fce linéaire:

$$\delta\alpha = \frac{\partial f(\delta r)}{\partial r}\,\delta r$$

$$\begin{bmatrix}\delta\alpha_1\\ \delta\alpha_2\\ \delta\alpha_3\end{bmatrix} = \mathbf{F}_\alpha \cdot \begin{bmatrix}\delta r_1\\ \delta r_2\\ \delta r_3\\ \delta r_4\end{bmatrix}$$

Corrélation induite
Exemple, car on peut le voir … (3)



- On applique $\mathbf{K}_{\alpha\alpha} = \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{K}_{rr} \cdot \mathbf{F}_\alpha^T$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\alpha_1}^2 & \sigma_{\alpha 12} & \sigma_{\alpha 13} \\ & \sigma_{\alpha_2}^2 & \sigma_{\alpha 23} \\ & & \sigma_{\alpha_3}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_\alpha \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{34} \\ & & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ & & & \sigma_4^2 \end{bmatrix}}_{\sigma_r^2 \cdot \mathbf{I}_4 \text{ (hypothèse)}} \mathbf{F}_\alpha^T$$

$\alpha = f(r)$

- $\mathbf{K}_{\alpha\alpha} = \sigma_r^2 \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

avec : $\sigma_{\alpha_1}^2 = \sigma_{\alpha_2}^2 = \sigma_{\alpha_3}^2 =$

$\rho_{\alpha_1\alpha_2} = \rho_{\alpha_1\alpha_2} = \rho_{\alpha_2\alpha_3} =$

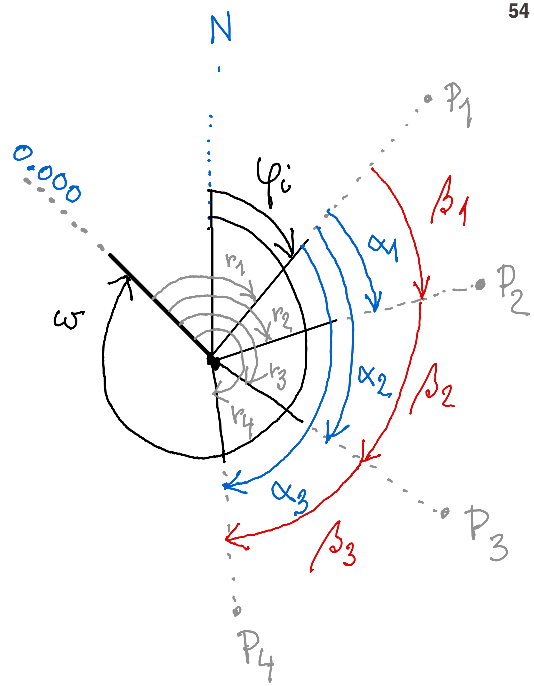
Corrélation induite
Exemple, car on peut le voir … (4)

- Nous aimerions maintenant connaître les angles relatifs entre les points.

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}} \begin{bmatrix}r_1\\ r_2\\ r_3\\ r_4\end{bmatrix}$$

- Fce linéaire: $\mathbf{F}_\beta = \frac{\partial f(\delta r)}{\partial \beta}$

$$\mathbf{K}_{\beta\beta} = \ ?$$

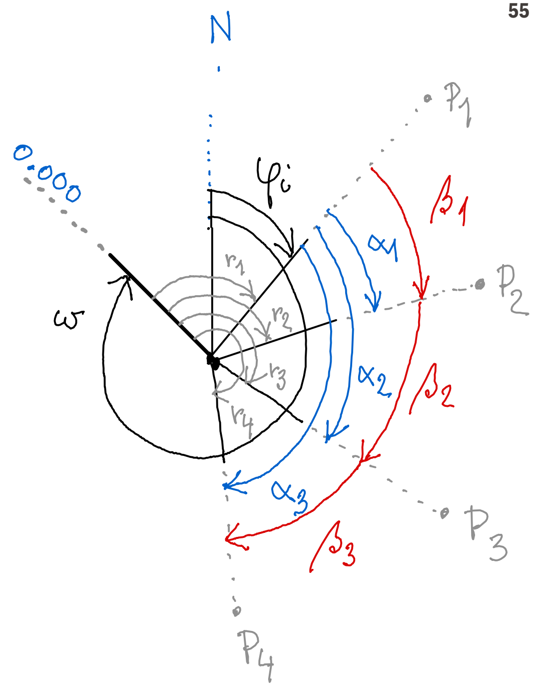


$$y = \mathbf{f}_2(\ell_b)$$

$$\beta = f(r):$$

$$\beta_1 = r_2 - r_1$$
$$\beta_2 = r_3 - r_2$$
$$\beta_3 = r_4 - r_3$$

Corrélation induite
Exemple, car on peut le voir ... (5)



$$\beta = f(r)$$

- On applique: $\mathbf{K}_{\beta\beta} = \mathbf{F}_\beta \cdot \mathbf{K}_{rr} \cdot \mathbf{F}_\beta^T$

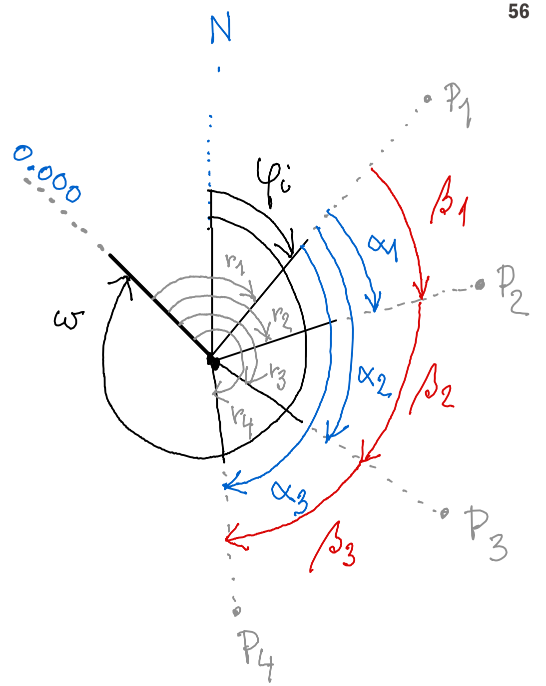
$$\mathbf{K}_{\beta\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1^2 & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_n^2 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_\beta \cdot \sigma_r^2 \mathbf{I}_4 \cdot \mathbf{F}_\beta$$

- $\mathbf{K}_{\beta\beta} = \sigma_r^2 \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ avec : $\sigma_{\beta_1}^2 = \sigma_{\beta_2}^2 = \sigma_{\beta_3}^2 =$

$\rho_{\beta_1\beta_2} = \rho_{\beta_2\beta_3} =$

$\rho_{\beta_2\beta_3} =$

Corrélation induite
Exemple, car on peut le voir … (6)



- Nous voulons maintenant faire la somme de tous les angles β_i pour obtenir un nouvel angle.

$$f(\beta) = \sum \beta_i = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_\sum} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\beta\beta} = \sigma^2_{\sum\beta} = \; ?$$

$$\mathbf{K}_{\beta\beta} = \mathbf{F}_\sum \cdot \mathbf{K}_{\beta\beta} \cdot \mathbf{F}_\sum^T =$$

$$y = \mathbf{f}_3(\ell_\beta)$$

$$\sum_{i=1}^{3} \beta_i = f(\beta)$$

- Pourquoi $\sigma^2_{\sum\beta}$ a la même précision comme les angles α_i?

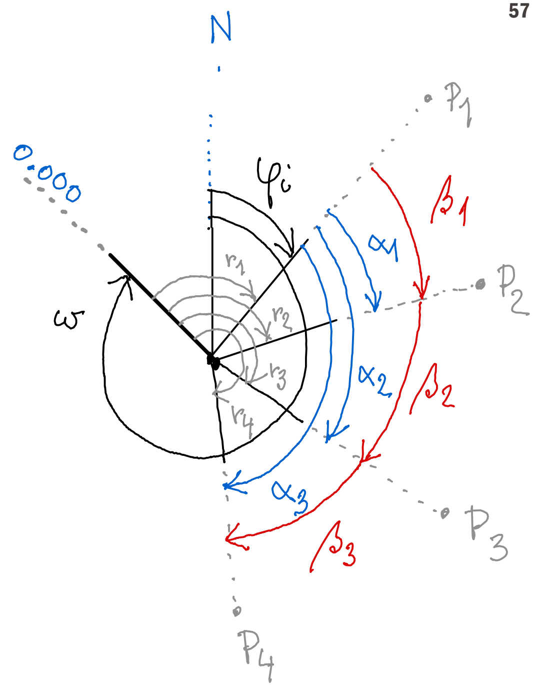
Corrélation induite
Exemple, car on peut le voir … (6)

- Nous voulons maintenant faire la somme de tous les angles β_i pour obtenir un nouvel angle.

$$f(\beta) = \sum \beta_i = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_{\sum}} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\beta\beta} = \sigma^2_{\sum\beta} = \ ?$$

$$\mathbf{K}_{\beta\beta} = \mathbf{F}_{\sum} \cdot \mathbf{K}_{\beta\beta} \cdot \mathbf{F}^T_{\sum} =$$



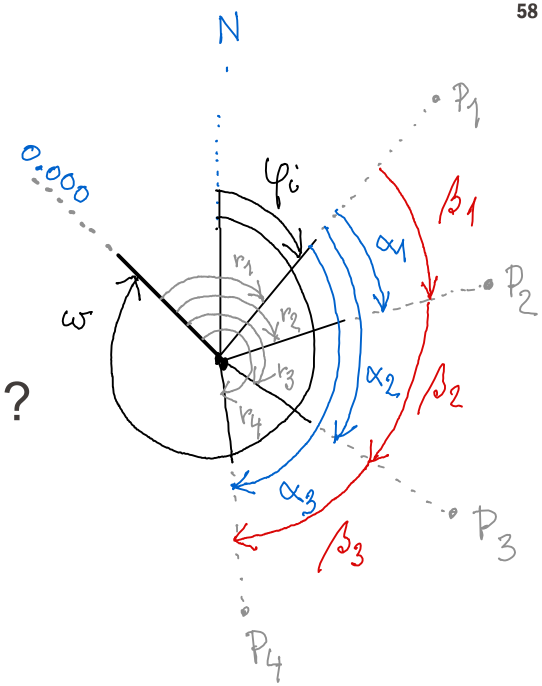
$$y = \mathbf{f}_3(\ell_\beta)$$

$$\sum_{i=1}^{3} \beta_i = f(\beta)$$

- Pourquoi $\sigma^2_{\sum\beta}$ a la même précision comme les angles α_i?

Corrélation induite
Exemple, car on peut le voir … (7)

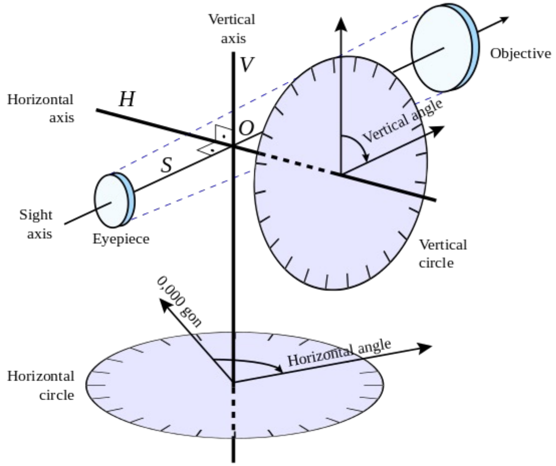
- Pourquoi $\sigma^2_{\sum\beta}$ a la même précision comme les angles α_i?



$$y = \mathbf{f}_3(\ell_\beta)$$

$$\sum_{i=1}^{3} \beta_i = f(\beta)$$

ME 3-2 : Corrélation induite
Exemple géométrique, car on peut le voir …



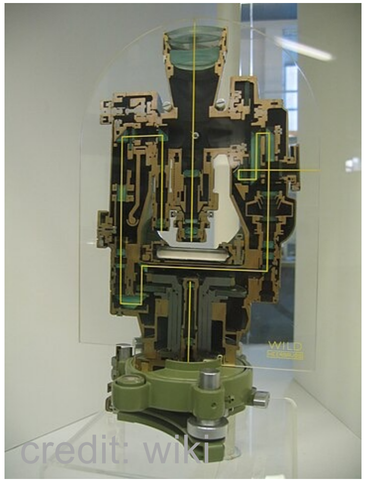
- Gisement (φ) = orientation (ω) + direction (r)

- Angles *avec référence fixe* $$y = \mathbf{f}_1(\ell_a)$$
  - Variance d'un angle
  - Corrélation positive → interprétation

- Angles *séquentiels* $$y = \mathbf{f}_2(\ell_b)$$
  - Variance d'un angle
  - Corrélation négative → interprétation
  -

- *Somme* d'angles $$\mathbf{K}_{yy} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{K}_{\ell\ell} \cdot \mathbf{F}^T$$
  - variance inchangée

  - $\Longrightarrow$ La propagation est indépendante du chemin!
    (si le modèle est cohérent)

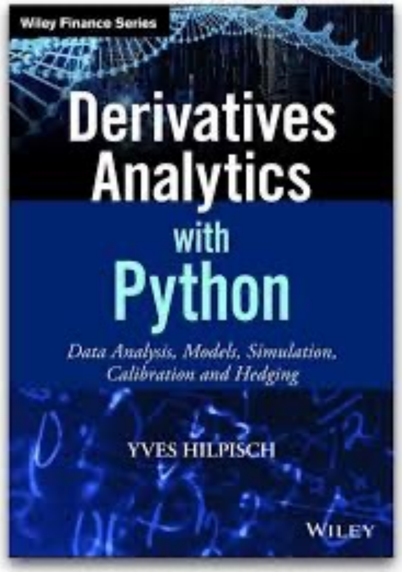


ME 3-3 : Linéarisation

- Status d'une variable
  - Valeur mesurée, vrais, estimée, moyenne, approchée
  - Notation :

$$\ell,\ \check{\ell},\ \hat{\ell},\ \bar{\ell},\ \mathring{\ell}$$

- Choix de la méthode
  - Différentiation analytique: ✓
  - Différentiation numérique $\leftrightarrow$ définition de la dérivée
    - Fonction linéaire
    - Parabole et logarithme naturel
    - Fonction quelconque
  - Cas particuliers $\log_{10}(x)$ et sin(α [deg])
  - variance inchangée



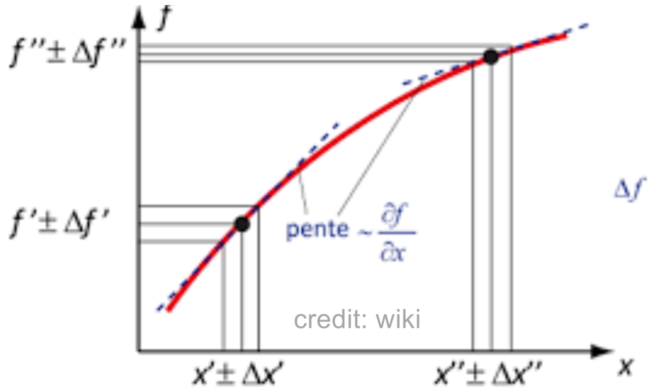
$\Longrightarrow$ On peut calculer la dérivée d'une fonction sans dériver la fonction!

ME 3-4 : Trois fonctions de 3 variables

- Modèle fonctionnel
  - Matrice **F** des dérivées partielles
  - Linéarisation numérique et analytique

$$\mathbf{y} = \{y_i\} = \{f_i(\ell_1,\, \ell_2,\, \ell_3)\}$$
$$i = \{1,\, 2,\, 3\}$$

- Propagation “classique”
  - Erreur vraie (analyse de sensibilité)
  - Erreur maximale (calcul de tolérance)
    - On ignore: *lés corrélations* des variables
    - On cumule: les erreurs de façon *pessimistes*
    - On n’obtient pas: *les corrélations des fonctions*



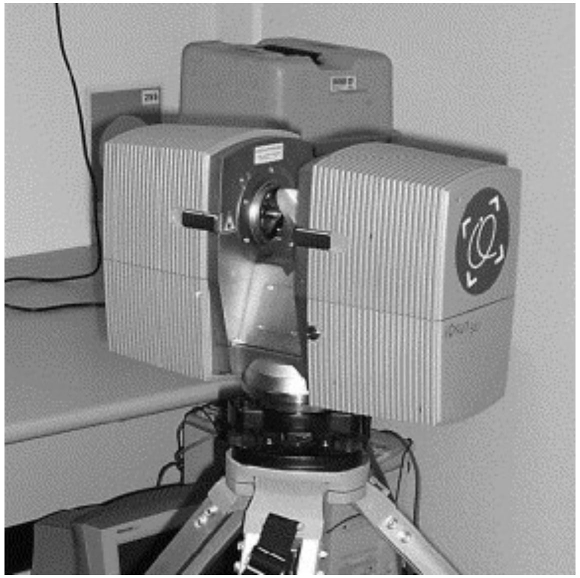
- Propagation de variance
  - Construction de la matrice de covariance des variables
  - Calcule de la matrice de covariances des fonctions (via la loi générale)
  - Extraction des écart-types et des corrélations

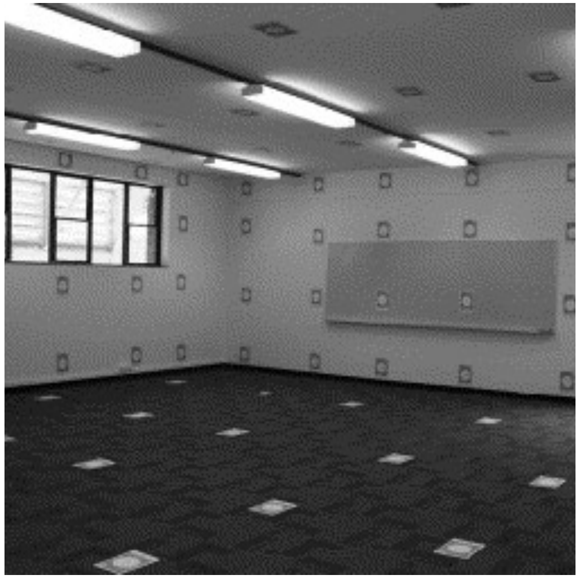
$\Longrightarrow$ Comparaisons et interprétation

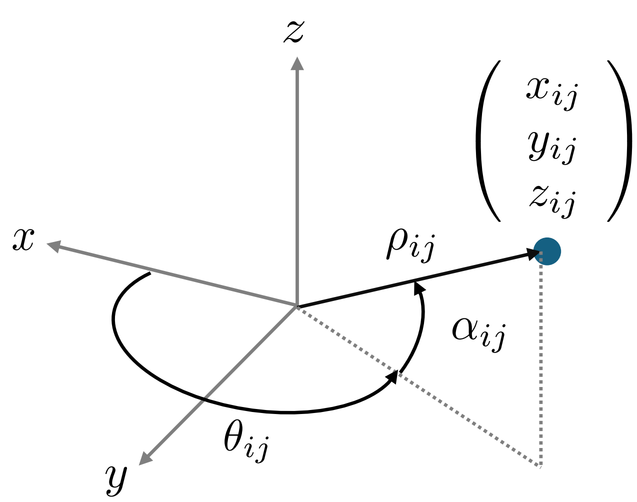
ME 3-4 : Trois fonctions de 3 variables – Exo 4

- Modèle fonctionnel
  - Matrice **F** des dérivées partielles
  - Linéarisation numérique et analytique

$$\mathbf{y} = \{y_i\} = \{f_i(\ell_1,\, \ell_2,\, \ell_3)\}$$
$$i = \{1,\, 2,\, 3\}$$







EPFL

ME 3-5 : Poids et cofacteurs


credit: wiki

- Mesures indépendantes et de même type
  - Choix de $\sigma_0 =$ écart-type d'une observation de poids 1
  - Covariance = variance x cofacteurs : $\mathbf{K}_{\ell\ell} = \sigma_0^2 = \mathbf{Q}_{\ell\ell}$
  - Poids = (cofacteurs)$^{-1}$: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1}$
  - Même précision : $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\ell\ell} = \mathbf{I}$
- Moyenne *pondérée*
  - Moyenne avec variance minimale
  - Poids de la moyenne = somme de poids !
- Mesures *corrélées*
  - Généralisation des poids
  - Interprétation plus difficile des éléments
- Mesures de types *différents*
  - Facteur de multiplication commun
  - Choix des unités – défis (problèmes) numériques